Лекция 1

Основы матричных вычислений

Рахуба М.В.

18.01.21

Основы матричного анализа

1 Векторные нормы

Опр. 1 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ — норма, если

лин. пр-во над полем $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$
2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Примеры $V = \mathbb{F}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$

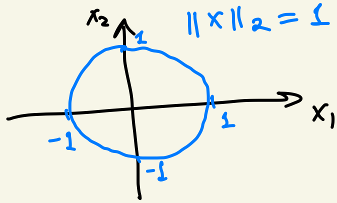
•) $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2} = \sqrt{x^* x}$

Эрмитово сопряж. $x^* \equiv \bar{x}^T$

$\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = 1$

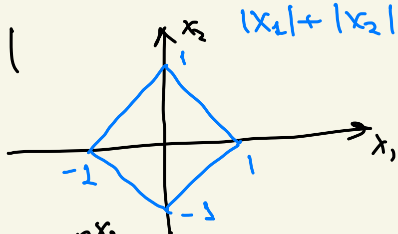
$\|$

$\|x\|_2 = 1$



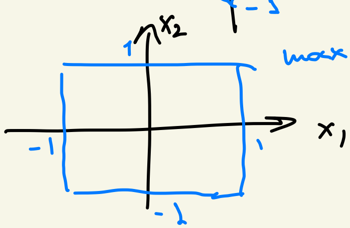
•) $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

$|x_1| + |x_2| = 1$



•) $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$

$\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$

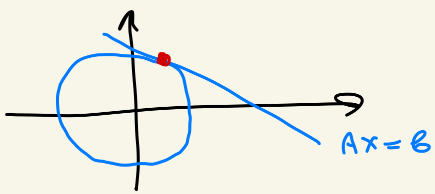


•) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \; p \geq 1 \quad \left(\|x\|_p \to \|x\|_\infty, \; p \to \infty \right)$

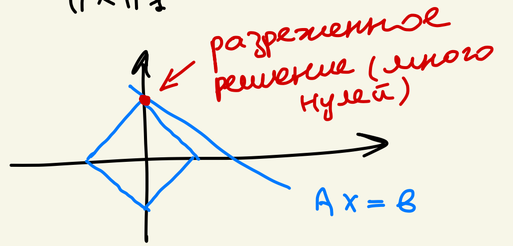
а) Разреженность в $\|\cdot\|_1$

$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; b \in \mathbb{R}^m, \quad m < n$ (беск. много реш.)

$\|x\|_2 \to \min$



$\|x\|_1 \to \min$



б) Эквивалентность норм

Теор 1 $\forall$ две нормы $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ (необязательно p-нормы) на конечномерном пр-ве V эквивалентны, то есть $\exists\, C_1, C_2 > 0$ (не зависят от x):

$$C_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C_2 \|x\|_a \quad \forall x \in V.$$

Сходимость: $x_k \to x$, если $\|x_k - x\| \to 0, \; k \to \infty$

в силу эквивалентности можно выбрать любую из норм (какую удобнее)

2 Матричные нормы

Опр. 2 $\|\cdot\|$, заданная $\forall$ матрицы назыв. матричной, если

1) $\|\cdot\|$ — норма на $V = \mathbb{F}^{m\times n}$ $\forall m, n \geq 1$

2) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (субмультипликативность)

Примеры

•) $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} =$ — Фробениусова норма

$= \sqrt{\operatorname{Tr}(A^*A)} = \sqrt{\operatorname{Tr}(AA^*)}$

•) $\|A\|_C = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$ — норма Чебышёва (не субмультиплик.)

•) Операторные нормы (порождаются двумя векторными)

$$\|A\|_{a\to b} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_b}{\|x\|_a} = \left(\sup_{x\neq 0} \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_a}\right)\right\|_b \overset{y=\frac{x}{\|x\|_a}}{=}\right)$$

$$= \sup_{\|y\|_a=1} \|Ay\|_b$$

какие-то 2 векторные нормы (не обязательно p-нормы)

Вообще говоря, не матричные, но:

$\|Ax\|_b \leq \|A\|_{a\to b} \|x\|_a$ — условие согласованности

•) $\|A\|_p = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ — матричные p-нормы (субмультипликативны)

$p=2$: $\|A\|_2 = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \left(= \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(A^*A)} = \right.$
$\left. = \sqrt{\lambda_1(AA^*)}\right)$

след. лекция

$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ – на семинаре

3 Унитарные матрицы

Опр. 3 Матрица $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная, если

$$U^{-1} = U^* \quad (\Leftrightarrow U^*U = UU^* = I)$$

Пусть $U = [u_1 \dots u_n]$, тогда $u_i^* u_j = 0$, $i \neq j$ – ортонорм. столбцы u_i
$u_i^* u_i = 1$
(аналогично для строк U)

Утв. 1 Если $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарная, то

$$\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

$\square$ $\|Ux\|_2^2 = (Ux)^* Ux = x^* U^* U x = x^* x = \|x\|_2^2$ $\blacksquare$

Утв. 2 Пусть $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – унитарные, тогда

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$$
$$\|UAV\|_F = \|A\|_F$$

□ $\|\cdot\|_2$:

$$\|UAV\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\overset{\text{утв.2}}{\cancel{U}} A \overbrace{Vx}^{y}\|_2}{\|\underbrace{\underset{\text{утв.2}}{V} x}_{y}\|_2} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = \|A\|_2$$

$\|\cdot\|_F$: ДЗ ∎

4 Разложение Шура

Собств. разлож.:

$$\overset{\in \mathbb{C}^{n\times n}}{A} = \underbrace{S}_{\substack{\| \\ [s_1 \dots s_n] \\ \text{собств. век.}}} \underbrace{\Lambda}_{\substack{\| \\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ \text{собств. знач.}}} S^{-1},$$

$\exists$ не для $\forall$ матр.

Жорд. норм. форма:

$$A = P \underbrace{J}_{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k(\lambda_k) \end{pmatrix}}} P^{-1},$$

$\exists$ $\forall$ матр., но неустойч. при вычислениях (сильно меняется при небольших возмущениях, см. ДЗ)

Для вычисления:

$\boxed{\text{Теор}}$ (Шура) $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ с собств. знач. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\exists U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – унитарная:

$$A = U \underbrace{T}_{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}} \underbrace{U^*}_{\| \; U^{-1}}$$

(разлож. Шура)

– верхнетреугольная

□ По индукции. $n = 1$ – очевидно

$$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n} \ \exists \underbrace{v_1}_{\text{собств. вект.}}, \underbrace{\lambda_1}_{\text{собств. знач.}} : \ A v_1 = \lambda_1 v_1, \ \|v_1\|_2 = 1$$

$$U_1 = [v_1 \ \overbrace{v_2 \ldots v_n}^{\text{дополним до ортонорм. базиса}}] \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ – унитарная}$$

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix} [\underbrace{A v_1}_{\lambda_1 v_1} \ \ldots \ A v_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^* \overbrace{A v_1}^{\lambda_1 v_1} & v_1^* A v_2 & \ldots & v_1^* A v_n \\ \cancel{v_2^* \underbrace{A v_1}_{\lambda_1 v_1}} \ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \cancel{v_n^* \underbrace{A v_1}_{\lambda_1 v_1}} \ 0 & \ldots & & v_n^* A v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{A_1}_{U_2 T_2 U_2^*} \\ 0 & \end{bmatrix} =$$

(т.к. $A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ и предполож. индукц.)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \underbrace{U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}}_{\text{унитарная как произведение унитарных}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & U_2^* \end{bmatrix} U_1^*$$

■

Опр. 4 A — нормальная, если

$$A^* A = A A^*$$

Пример Нормальные: "обобщение" на компл. симметричных матриц

- $A = A^*$ (эрмитова) "обобщение" ортогональной
- $A^{-1} = A^*$ (унитар.) "обобщение" антисимметричной
- $A = -A^*$ (косоэрмитова)

Утв. 3 Матрица A диагонализуется в унитарном базисе ($A = U \underbrace{\Lambda}_{\text{диагональная}} \underbrace{U^*}_{= U^{-1}}$)

$$\Updownarrow$$

A — нормальная

□ ($\Rightarrow$) $A = U \Lambda U^*$

$$A^* A = U \Lambda^* \underbrace{U^* U}_{I} \Lambda U^* =$$

$$= U \Lambda^* \Lambda U^*$$

$$A A^* = U \Lambda \Lambda^* U^*$$

$\Lambda^* \Lambda = \Lambda \Lambda^*$ так как Λ — диагональная.

Значит, $A^* A = A A^*$

$(\Leftarrow)$ $AA^* = A^*A$, $A = UTU^*$ - разлож. Шура

$$\cancel{U}TT^*\cancel{U^*} = \cancel{U}T^*T\cancel{U^*}$$

$$TT^* = T^*T \qquad \blacksquare$$

Так как T - верхнетреугольная, то так может быть только если T - диагональная