Лекция 11

Основы матричных вычислений

Рахуба М.В.

12.04.21

$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$Ax = b$, $\underset{\det(A)\neq 0}{A \in \mathbb{C}^{n\times n}}$, $b \in \mathbb{C}^n$

$(A, b) \rightarrow x = A^{-1} b$

$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq ? \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

1 Матричные ряды

Def Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – сходящийся, если $S_N = \sum_{k=0}^{N} A_k$ сходится

Утв 1 $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < \infty \Rightarrow \exists \sum_{k=0}^{\infty} A_k$

$\square$ $\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=m}^{n} A_k\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|A_k\|$

$\forall \varepsilon \; \exists N : \forall m, n \geq N \;\; \|S_n - S_m\| < \varepsilon$

$\boxed{\text{Опр 1}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ — ряд Неймана

$$\left(\begin{array}{l} 1+x+x^2+\ldots = \dfrac{1}{1-x} \\ (I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \end{array} \right)$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\|A\| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k < \infty$

$\boxed{\text{Опр. 2}}$ $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ — спектрал. радиус

с.з. A

$$\left(\begin{array}{l} \rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} \text{ — ф-ла Гельфанда} \\ \rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\| \end{array} \right)$$

$\boxed{\text{Теор}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится $\Leftrightarrow$ $\rho(A) < 1$

$\square$ $\Leftarrow$ $A = U T U^{-1}$ — разл. Шура

$$D_\varepsilon = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$$

$$(D_\varepsilon^{-1} T D_\varepsilon)_{ij} = \varepsilon^{j-i} t_{ij}, \quad i \le j$$

$$|t_{ii}| < 1 \quad (\text{т.к. } \rho(A) < 1)$$

внедиаг. часть $\left(D_\varepsilon^{-1} T D_\varepsilon\right) \to 0, \ \varepsilon \to 0$

$$\| D_\varepsilon^{-1} T D_\varepsilon \|_1 < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(D_\varepsilon^{-1} T D_\varepsilon\right)^k}_{D_\varepsilon^{-1} T^k D_\varepsilon} \quad \text{сходится} \qquad \left(D_\varepsilon^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k \right) D_\varepsilon \right)$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad \text{сходится}$$

$$U\left(\sum_k T^k\right) U^{-1} = \sum_k U T^k U^{-1} = \sum_k \left(U T U^{-1}\right)^k$$

$\Downarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\underbrace{U T U^{-1}}_{A})^k \quad \text{сходится}$$

$\Rightarrow$ $\neg \exists \ \lambda : |\lambda| \geq 1$ и ряд сходится

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1$$

$$A^k x = \lambda^k x$$

$$\underbrace{\|\lambda^k x\|_2}_{= |\lambda|^k} = \|A^k x\|_2 \leq \|A^k\|_2$$

$$1 \leq |\lambda|^k \leq \|A^k\|_2$$

$$\|A^k\|_2 \not\to 0$$

$\Downarrow$

Ряд расходится

$$\left(\begin{array}{l} S_k \to S \\ S_{k+1} \to S \\ \|S_{k+1} - S_k\| = \|A^k\| \end{array}\right)$$

$\blacksquare$

2 Теор. возмущений для лин. сист.

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ $\|A\| < 1 \Rightarrow \exists\ (I - A)^{-1}$ и

1) $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$

2) $\|(I - A)^{-1}\| \le \dfrac{\|I\|}{1 - \|A\|}$

$\square$

1) $$\underbrace{(I - A)\sum_{k=0}^{N} A^k}_{\sum_{k=0}^{N} A^k - \sum_{k=0}^{N} A^{k+1}} = I - A^{N+1}$$

$$\left\|(I - A)\sum_{k=0}^{N} A^k - I\right\| = \|A^{N+1}\| \le \|A\|^{N+1} \to 0$$

2) $$\left\|\sum_{k=0}^{N} A^k\right\| \le \|I\| \sum_{k=0}^{N} \|A\|^k \le \frac{\|I\|}{1 - \|A\|}$$

$\|I\| = \|I^2\| \le \|I\|^2 \Rightarrow \|I\| \ge 1$ $\qquad \le \|I\| + \underset{}{\overset{\le \|I\|\,\|A\|}{\|A\|}} + \dots$

$\blacksquare$

$$Ax = b$$

$$\underbrace{(A+\Delta A)(x+\Delta x)}_{\cancel{Ax} + \Delta A x + (A+\Delta A)\Delta x} = (\cancel{b} + \Delta b)$$

$$\|A^{-1}\Delta A\| < 1$$

$$(A+\Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A x$$

$$\Delta x = \underbrace{(A+\Delta A)^{-1}}_{(A(I+A^{-1}\Delta A))^{-1} = (I+A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}} (\Delta b - \Delta A x) = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1} (\Delta b - \Delta A x)$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \, \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \frac{\|\Delta A\| \, \cancel{\|x\|}}{\cancel{\|x\|}} \right) \le$$

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\| \, \|x\| \Rightarrow \|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$\le \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \|A\| + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \|A\| \right) =$$

$$= \frac{\|A\| \, \|A^{-1}\|}{1 - \underbrace{\|A^{-1}\Delta A\|}_{\le \|A^{-1}\| \, \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) \le$$

$$\le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \mathrm{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

3 Матричная экспонента

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad R = +\infty \text{ - рад. сход.}$$

$\boxed{\text{Def}}$ $$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \text{ — матриц. эксп.}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B \Leftrightarrow AB = BA$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-A} = (e^A)^{-1}$$

$\boxed{\text{Утв 2}}$ $$A = SBS^{-1} \Rightarrow e^A = Se^BS^{-1}$$

$\square$ $$A^2 = SBS^{-1}SBS^{-1} = SB^2S^{-1}$$

$$A^k = SB^kS^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S\frac{B^k}{k!}S^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}\right)S^{-1}$$ $\blacksquare$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cancel{k}A^k t^{k-1}}{\cancel{k!}\,(k-1)!} =$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad y(t) = e^{At} y_0 \text{ — решение}$$

Если $A = S \overset{\text{диаг.}}{\Lambda} S^{-1}$, то

$$y(t) = S \underbrace{e^{\Lambda t}}_{= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}} \underbrace{S^{-1} y_0}_{c} = c_1 e^{\lambda_1 t} s_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} s_n$$

Аналогич. через ряды можно опр., напр.,

$\sin(A)$, $\cos(A)$, $\ln(I + A)$

Как опр., например, $\mathrm{sign}(A)$?

N. Higham

$\boxed{\text{Def}}$ $A = PJP^{-1}$, $J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_q(\lambda_q) \end{pmatrix}$

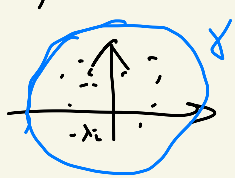
$$f(A) \overset{def}{=} P \begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(J_q(\lambda_q)) \end{pmatrix} P^{-1},$$

где

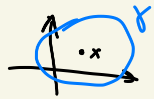
$$f(J_k(\lambda_k)) = \begin{bmatrix} f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(m_k-1)}(\lambda_k)}{(m_k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} \\ 0 & & & f(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

$$J_k(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,(zI - A)^{-1}\,dz$$ — эквивалент. определение



(Ф-ла Коши : $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-x}\, dz$



)