Прямые методы решения лин. сист. с плотными матрицами.

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det(A) \neq 0$$

$$A = QR, \qquad QRx = b$$
$$Rx = Q^T b$$

$2mn^2 - \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

// $m = n$

$\frac{4}{3}n^3$

$$A = U\Sigma V^T, \qquad x = V\Sigma^{-1}U^T b,$$

$2mn^2 + 11n^3 + O(n^2)$

// $m = n$

$13n^3$

(1) LU - разложение

Опр. $A = LU$ - LU разлож.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ * & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Нижние унитреуг.

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$
$$LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b & \text{- прямая подст.} \\ Ux = y & \text{- обратная подст.} \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$
(далее)

$\boxed{\text{Опр.}}$ A — строго регулярна, если все её ведущ. подм. невырожд.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_k} & \\ & \end{pmatrix}, \quad \det(A_k) \neq 0$$

$\boxed{\text{Теор}}$ Пусть $\det(A) \neq 0$. A имеет LU-разл. $\Leftrightarrow$ она строго регулярна

$\square$ $(\Rightarrow)$ $A = LU$

$$0 \neq \det(A) = \det(L)\det(U) = u_{11} \dots u_{nn}$$

$$\Downarrow$$

$$u_{kk} \neq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$$A = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{L_k U_k}^{A_k} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\det(A_k) = \overset{=1}{\det(L_k)} \underbrace{\det(U_k)}_{\begin{pmatrix} u_{11} \dots & * \\ 0 & \dots u_{kk} \end{pmatrix}}$$

$$u_{11} \dots u_{kk} \neq 0$$

⇐ По индукции

$$A = \begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a}b & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c^T \\ 0 & \underbrace{D-\frac{1}{a}bc^T}_{A_1} \end{pmatrix}$$

A_1 – строго регулярна (ДЗ)

$A_1 = L_1 U_1$ т.к. размер $(n-1)\times(n-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a}b & L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c^T \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c^T \\ b & \cancel{\frac{1}{a}bc^T} + \underbrace{L_1U_1}_{\substack{= A_1 \\ = D-\cancel{\frac{1}{a}bc^T}}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix}$$ – явно построили LU-разлож. A. ∎

Утв. LU-разлож. опр. единств. образом

□ $A = L_1U_1 = L_2U_2$

$$\underbrace{L_2^{-1}L_1}_{\text{нижняя унитреуг.}} = \underbrace{U_2U_1^{-1}}_{\text{верхнетреуг}} = \underbrace{D}_{\text{диагональная}} = I$$

$$L_1 = L_2$$
$$U_2 = U_1 \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ (LDL - разлож.). Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ явл. строго рег. и $A = A^*$. Тогда $\exists L$ - нижнетреуг и D - диаг:

$$A = LDL^*$$

$\square$ $A = LU = L\underset{\operatorname{diag}(U)}{\underset{\shortparallel}{D}} D^{-1} U = A^* =$

$$= (U^* D^{-*})(D^* L^*)$$

$$\Downarrow$$

$$L = U^* D^{-*} \Rightarrow LD^* = U^*$$

$$\underset{D}{\underset{\shortparallel}{D^{**}}} L^* = U \qquad \blacksquare$$

$$U = DL^*$$

② Связь LU- разлож и метода искл. Гаусса

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{a}b & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c^T\\ b & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c^T\\ 0 & D-\frac{1}{a}bc^T\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ * & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ * & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = Z_1$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0\\ \vdots & * & 1 & \ddots & \\ 0 & * & 0 & & 1\end{pmatrix}}_{Z_2}\begin{pmatrix}* & * & \cdots & *\\ 0 & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & * & \cdots & *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}* & * & \cdots & & *\\ 0 & * & * & \cdots & *\\ \vdots & 0 & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & * & \cdots & *\end{pmatrix}$$

$$Z_{n-1}\dots Z_2 Z_1 A = U$$

$$A = \underbrace{\left(Z_1^{-1} Z_2^{-1} \dots Z_{n-1}^{-1}\right)}_{L} U$$

Сложность: $2\left[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2\right] = 2\cdot\frac{n^3}{3} + O(n^2)$

$D - \left(\frac{1}{a}b\right)c^T$

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I & 0\\ CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & S\end{pmatrix}$$

$$S = D - CA^{-1}B$$

док. по Шуру A.

③ Выбор ведущего элемента

Теор (без док-ва) Пусть $\exists$ LU-разлож A и в процессе вычисл. не возник маш. 0, Тогда для реал. выч. $\hat L, \hat U$:

может быть рост элементов

$$|A - \hat L \hat U| \le 3n\,\varepsilon_{machine}\left(|A| + |\hat L||\hat U|\right) + O(\varepsilon_{machine}^2)$$

Пример

$$\begin{pmatrix} \overset{\ll 1}{\varepsilon} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underset{\gg 1}{1/\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \underset{\gg 1}{1 - 1/\varepsilon} \end{pmatrix}$$

a) Частичный выбор ведущ. эл.

(partial pivoting)

$$PA = LU \qquad (\text{LUP-разлож.})$$

$$\begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix} \qquad -\frac{1}{a}b$$

$$\begin{pmatrix} * & - & * & - & * \\ & \ddots & | & & | \\ 0 & & * & - & * \\ & & \boxed{a_k \quad \hat A_k} & & \end{pmatrix}$$

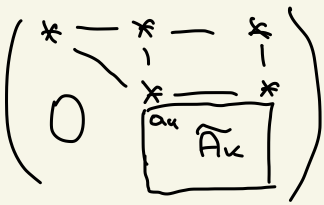
a_k – наиб. по модулю в первом столбце $\hat A_k$.

$\Downarrow$

$\|L\|_C = 1$. Но элементы в U могут расти экспоненциально (семинар).

б) Полный выбор (full pivoting)

$$PAQ = LU$$



a_k — наиб. по модулю в $\hat{A}_k$. $\|L\|_C = 1$

$$\rho = \frac{\|U\|_C}{\|A\|_C} \overset{?}{\le} n \quad \text{— опровергнута}$$

4 Разложение Холецкого (Cholesky)

$\boxed{\text{Опр.}}$ $A = \underset{\text{нижнетреуг.}}{L} L^*$ — разложение Холецкого

$\boxed{\text{Теор}}$ Пусть $\det(A) \neq 0$. $A = LL^* \iff A = A^* > 0$

$\square$ $\Rightarrow$ $A = LL^*$

$$(x, LL^* x) = (L^* x, L^* x) = \|L^* x\| > 0, \quad x \neq 0$$

$\Leftarrow$ $A = LDL^* = LD^{1/2} D^{1/2} L^* =$

$$= (LD^{1/2})(LD^{1/2})^*$$

$D > 0$, т.к. $(x, LDL^* x) = (\overbrace{L^* x}^{y}, DL^* x) =$

$$= (y, Dy) > 0, \quad y \neq 0$$

Алгоритм вычисления разл. Холец. [redacted] для $A \in \Pi^{n\times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

1: $a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$a_{21} = l_{21} l_{11} \Rightarrow l_{21} = a_{21}/l_{11}$

$a_{31} = l_{31} l_{11} \Rightarrow l_{31} = a_{31}/l_{11}$

2: $a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$

$$a_{32} = l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}}$$

for $k = 1, n$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk}^2 - l_{k,1}^2 - \dots - l_{k,k-1}^2}$$

for $i = k+1, n$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - l_{i,1} l_{k,1} - \dots - l_{i,k-1} l_{k,k-1}}{l_{kk}}$$

Теор

$$|A - \hat{L}\hat{L}^*| \le \varepsilon_{machine}(n+1) \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} \\ \vdots \\ \sqrt{a_{nn}} \end{pmatrix} \left(\sqrt{a_{11}} \dots \sqrt{a_{nn}}\right) + O(\varepsilon_{machine}^2)$$

нет роста элементов!

Сложность: $\frac{1}{3} n^3 + O(n^2)$