Лекция 19

Основы матричных вычислений

Рахуба М.В.

14.06.21

1 Теория возмущ. (продолж.)

Теор (2-я Теор Гершг.)

Если есть m кругов, образ. область G, то в G находится ровно m собств. знач.

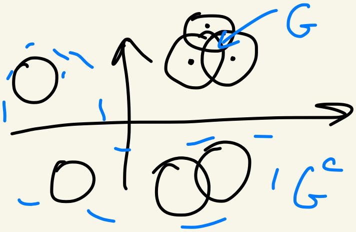
□ (не для экз.)

внедиаг. элем.

$$A(t) = \mathrm{diag}(A) + \mathrm{off}(A)\cdot t, \quad t\in[0,1]$$

$$A(0) = \mathrm{diag}(A), \quad A(1) = A$$

множество всех с.з. $A(0)$



$$\lambda_1(0),\ldots,\lambda_m(0) \in \lambda(A(0))$$

$$\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t) \in \lambda(A(t))$$

Непрерыв. ф-ции

Теор. о непр. завис. корней полинома от коэф.

$\blacksquare$

б) **Теор** (Бауэра - Файка)

Если $\mu\in\lambda(A+E)$ (и $\mu\notin\lambda(A)$),

то $$\|(A-\mu I)^{-1}\|^{-1} \le \|E\|$$

$\|(A-\mu I)^{-1}\|^{-1} = \min_i |\lambda_i - \mu|$ (при $\|\ \| = \|\ \|_2$, A-нормал)

□ $\underbrace{(A+E)-\mu I}_{\text{вырожд.}} = (A-\mu I)+E =$

$$= (A-\mu I)\underbrace{\left(I+(A-\mu I)^{-1}E\right)}_{\text{вырожд.}}$$

$\Downarrow$

$$\|(A-\mu I)^{-1}E\| \geq 1$$

$\Uparrow$

$$\|(A-\mu I)^{-1}\|\,\|E\|$$

■

$\boxed{\text{Теор}}$ Пусть $A = S\Lambda S^{-1}$ – диагонализ.

Тогда $\forall \mu \in \lambda(A+E)$:

$$\min_i |\mu-\lambda_i| \leq \underbrace{\|S\|_p\|S^{-1}\|_p}_{\mathrm{cond}(S)}\|E\|_p$$

□ 1) $\mu \in \lambda(A)$ – очевидно

2) $\mu \notin \lambda(A)$ – Бауэра-Файка

$$\mu \in (\underbrace{\Lambda + S^{-1}ES}_{S^{-1}(A+E)S})$$

$$\|(\Lambda-\mu I)^{-1}\|_p^{-1} \le \|S^{-1}ES\|_p \le \|S^{-1}\|_p\|E\|_p\|S\|_p$$

$$\|(\Lambda-\mu I)^{-1}\|_p^{-1} = \min_i |\lambda_i-\mu|$$

[redacted]

в) число обусл. с.з.

простое

$$Ax = \lambda x, \qquad A^T y = \lambda y$$

$$y^T A = \lambda y^T$$

если диагонализуема.

$$(AX = X\Lambda)$$

$$\left(\begin{aligned} Y^T A &= \Lambda Y^T \\ A\underbrace{(Y^T)^{-1}}_{X} &= (Y^T)^{-1}\Lambda \end{aligned}\right)$$

$$(A+\varepsilon F)\,x(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\,x(\varepsilon), \quad \|F\|_2 = 1$$

$$A\dot{x}(\varepsilon) + Fx(\varepsilon) + \varepsilon F\dot{x}(\varepsilon) = \dot{\lambda}(\varepsilon)x(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon)\dot{x}(\varepsilon)$$

$\varepsilon = 0$

$$A\dot{x}(0) + Fx(0) = \dot{\lambda}(0)x(0) + \lambda(0)\dot{x}(0)$$

$$\cancel{\underbrace{y^T A}_{\cancel{\lambda y^T}}\dot{x}}(0) + y^T F x = \dot{\lambda}(0)\,y^T x \; \cancel{+\lambda y^T \dot{x}(0)}$$

$$|\dot{\lambda}(0)| = \left| \frac{y^T F x}{y^T x} \right| \le \frac{\|y^T\|_2 \|F\|_2 \|x\|_2}{|y^T x|} =$$

$$= \frac{\|y\|_2 \, \|x\|_2}{|y^T x|} \qquad F = \frac{y x^T}{\|x\|\|y\|}$$

(достигается)

$$\frac{\|y\|_2 \, \|x\|_2}{|y^T x|} \equiv S(\lambda)$$

Дальнейших тем не будут на экзамене

2 Крыловские пр-ва для матрич. ф-й

1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad y(t) = \underbrace{e^{tA} y_0}_{\text{матрич. ф-я на вектор}}$

2) $x \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$

Плотность

$$f(x) \sim e^{\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x} = e^{\frac{1}{2} y^T y},$$

$$y = \Sigma^{-1/2} x, \quad x = \underbrace{\Sigma^{1/2} y}_{\text{матрич. ф-я на вектор}}, \quad y \sim \mathcal{N}(0, I)$$

Как вычислить?

а)

ортог базис в $K_k(A, x)$

$$f(A)x \approx Q_k Q_k^T f(A) x =$$

$$= Q_k \underbrace{Q_k^T f(A) Q_k}_{} e_1 \cdot \|x\|_2 \approx$$

$$\approx f(Q_k^T A Q_k)$$

$$(Q_k^T A Q_k)^2 = Q_k^T A \underbrace{Q_k Q_k^T}_{\text{ортопроектор}} A Q_k$$

$$\approx \|x\|_2 Q_k \, f(\underbrace{Q_k^T A Q_k}_{})e_1$$

H_k - верхняя хесс.

б) Паде аппроксимация

$$f(x) \approx \frac{p_n(x)}{q_m(x)}, \quad p_n(x), q_m(x) - \text{полиномы}$$

$$f(A)v \approx p_n(A) \underbrace{q_m(A)^{-1} v}_{}$$

линейная система, умеем быстро умнож. на $q_m(A)$

3 Оценка вычисл. следа

$$\cancel{e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k \quad e_k^T A e_k = a_{kk} \Rightarrow Tr(A) = \sum_k e_k^T A e_k}$$ – так не надо делать

Пусть $x_1, \dots, x_n$ – независ. одинак. распределённые случайные величины с мат. ожид. 0 и дисперсией 1. Тогда

$$Tr(A) = E[x^T A x] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^{(i)T} A x^{(i)}$$

$$E[x^T A x] = E\left[\sum_i \sum_j x_i x_j a_{ij}\right] =$$

$i \neq j$ // $E[x_i] E[x_j] = 0$

$$= \sum_i \sum_j a_{ij} E[x_i x_j] = \sum_i \sum_j a_{ij} \delta_{ij} =$$

$$= \sum a_{ii} = Tr(A)$$