Лекция 2

Основы матричных вычислений

Рахуба М. В.

25.01.21

Малоранговое приближение матриц 1

1 Разделение переменных и ранг матриц

$$f(x, y) = u(x)\, v(y) \text{ — ф-я с разделенными перем.}$$

$$f(x, y) = u_1(x)\, v_1(y) + \ldots + u_r(x)\, v_r(y)$$

Например, $f(x, y) \approx \sum_{\alpha, \beta = 0}^{p} c_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta$

$$f(x, y) \approx \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} c_{\alpha\beta} \sin \pi \alpha x \sin \pi \beta y$$

$$(x, y) \in (0, 1)^2$$

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, a_{ij} — ф-я дискр. перем.

$i \in \{1, \ldots, m\}$

$j \in \{1, \ldots, n\}$

$$a_{ij} = u_i v_j$$

$$\Updownarrow$$

$$A = u v^T, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Все столбцы и строки коллинеарны $\Rightarrow \operatorname{rank}(A) \le 1$

$\left(\operatorname{rank}(0) \overset{\text{def}}{=} 0 \right)$

$$A = u_1 v_1^T + \dots + u_r v_r^T = \underbrace{[u_1 \dots u_r]}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}}_{V^T}$$

$$\left(a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{r} u_{i\alpha} v_{j\alpha} \right)$$

$A = UV^T$ — скелетное разложение (rank decomp., matrix factoriz.)

$\boxed{\text{Замечание}}$

	A	U	V

1) Хранение матрицы: $m \cdot n \gg m \cdot r + n \cdot r = (m+n) r$ при $r \ll m, n$

2) Не единственно: $\forall S \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $\det(S) \neq 0$:

r столбцов в каждой

$$UV^T = \underbrace{US}_{\tilde U} \underbrace{S^{-1} V^T}_{\tilde V^T} = \tilde U \tilde V^T$$

$\boxed{\text{Утв. 1}}$

1) $\forall A : \operatorname{rank}(A) = r \ \exists U, V$:

$$A = UV^T$$

2) Если $A = UV^T$, то $\operatorname{rank}(A) \leq r$

$\square$ 1) U — базисные столбцы A

$a_i = U \tilde v_i \quad \left(V^T = [\tilde v_1 \dots \tilde v_n] \right)$

$[a_1 \dots a_n] = U [\tilde v_1 \dots \tilde v_n] = UV^T$

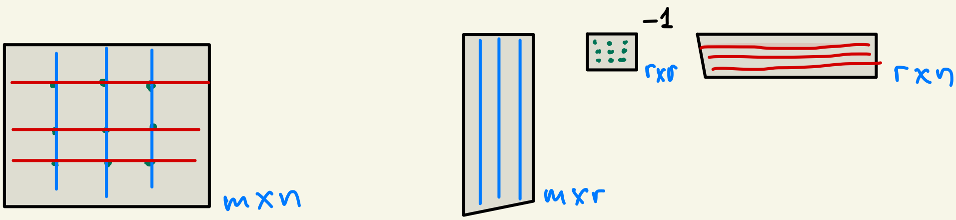
2) как сумма ранг-1 матриц:

$\operatorname{rank}(UV^T) = \operatorname{rank}(u_1 v_1^T + \dots + u_r v_r^T) \leq r$ $\blacksquare$

$$\underbrace{U\Sigma}_{\tilde{U}} V^T = \tilde{U} V^T \quad (\text{SVD} \to \text{скелетное})$$

$\boxed{\text{Утв. 2}}$ $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$ верно

$$A = C \hat{A}^{-1} R$$



где $\hat{A} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ — любая невырожд. подматр. A, $C \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $R \in \mathbb{C}^{n\times r}$ — столбцы и строки, содержащие подматрицу $\hat{A}$.

$\square$ $A = [a_1 \dots a_n]$

$a_i = C x_i$ ← коэф. разлож. по столбцам C

$\hat{a}_i = \hat{A} x_i$ ← подматрица a_i на строках R

$$\underbrace{[\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n]}_{R} = \hat{A} [x_1 \dots x_n]$$

$$[x_1 \dots x_n] = \hat{A}^{-1} R$$

$$[a_1 \dots a_n] = C[x_1 \dots x_n] = C\hat{A}^{-1} R \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Пример}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2)^{-1} (2\ 2\ 2), \qquad \operatorname{rank} = 1$$

② SVD

Опр 1) Матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ — положит. опр., если $x^* A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$

2) —— || —— положит. полуопр., если $x^* A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{F}^n$

Пример $A^* A$, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

1) $x^* A^* A x = (Ax)^* A x = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

2) $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$

3) Пусть λ_i, v_i — собств. пара $A^* A$, тогда

$x = v_i$: $v_i^* A^* A v_i = \lambda_i v_i^* v_i = \lambda_i \geq 0$

≥ 0, т.е. все с.з. неотриц.

Теор Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$, тогда

$\exists\, U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — унитарные и

$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ — сингул. числа:

$$A = U \Sigma V^*$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & \\ 0 & \ddots & \sigma_r & 0 \\ \hdashline & & 0 & \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$\square \quad \exists V \in \mathbb{C}^{n\times n}:$

$$V^*(A^*A)V = \Sigma_n^2, \qquad \Sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_r^* A^* A V_r & * \\ * & (V_r^\perp)^* A^* A V_r \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$$

Пусть $r: \ \sigma_r > 0, \ \sigma_{r+1} = 0$

$$V = [\underset{r}{V_r} \ \underset{n-r}{V_r^\perp}], \qquad U = [U_r \ U_r^\perp],$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_r^*(A^*A)V_r = \Sigma_r^2$$

$$\underbrace{\Sigma_r^{-1} V_r^* A^*}_{U_r^*} \underbrace{A V_r \Sigma_r^{-1}}_{U_r} = I$$

U_r - обозначение $AV_r\Sigma_r^{-1}$

$$A V_r \Sigma_r^{-1} = U_r$$

$$A V_r = U_r \Sigma_r$$

$$(V_r^\perp)^*(A^*A)V_r^\perp = 0$$

(взяли Trace)

$$\|AV_r^\perp\|_F = 0$$

$$\Downarrow$$

$$AV_r^\perp = 0$$

$$A\overbrace{[V_r \ V_r^\perp]}^{V} = [AV_r \ AV_r^\perp] = [AV_r \ 0] =$$

$$= [U_r\Sigma_r \ 0] = \overbrace{[U_r \ U_r^\perp]}^{U} \overbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\Sigma}$$

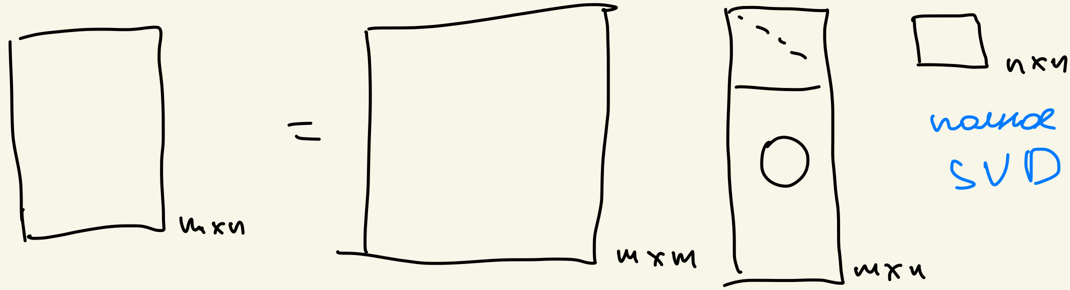
дополнили до ортонорм. базиса

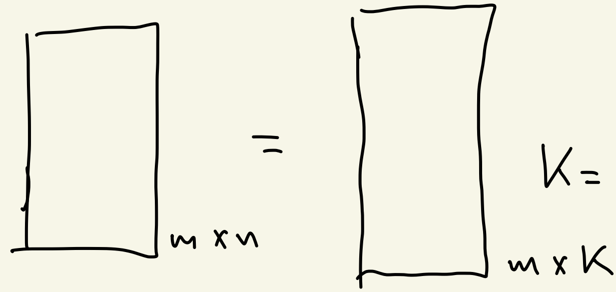
$$AV = U\Sigma$$

не вырожд.

$$A = U\Sigma V^* \Rightarrow \Sigma = U^* A V$$

$$\Rightarrow r = \operatorname{rank}(A) \quad \blacksquare$$





$K = \min(m, n)$: thin SVD

можно выбрать $K = r$, тогда называется компактным SVD

V – собств. вект. A^*A

U – собств. вект. AA^*

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)}$$

Утв.

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2(A) + \ldots + \sigma_r^2(A)}$$

$\square$ $\|A\|_F = \|U \Sigma V^*\|_F =$

$$= \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2} \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Теор}}$ Пусть $k < \operatorname{rank}(A) = r$ и

$$A_k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{первые } k \\ \text{столбцов } U}}{U_k}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ведущая} \\ k\times k \text{ подматрица} \\ \Sigma}}{\Sigma_k}\ V_k^* = \sum_{\alpha=1}^{k} \sigma_\alpha u_\alpha v_\alpha^*$$

(усечённое SVD)

Тогда

$$\min_{B:\, \operatorname{rank}(B) \le k} \| A - B \| = \| A - A_k \|$$

для любой унит. инв. нормы $\|\cdot\|$.

$\square$ $\|\cdot\|_2$:

выберем $z : \|z\|_2 = 1$

линейная оболочка

$$\exists\, z_{*0} \in \underset{\dim = n-k}{\ker B} \cap \underset{\dim = k+1}{\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}},$$

$(n-k) + (k+1) = n+1 > n$

$$\sup_{\|z\|_2 = 1} \|(A-B)z\|_2$$
$$\|$$
$$\|A - B\|_2 \ge \|(A-B)z\|_2 = \|Az\|_2 =$$

$$= \|\cancel{U}\, \Sigma V^* z\|_2 = \|\Sigma V^* z\|_2 \ge$$

унитар. инв

$$\| \quad \sqrt{\sigma_1^2 |(V^*z)_1|^2 + \ldots + \sigma_{k+1}^2 |(V^*z)_{k+1}|^2}$$

$((V^*z)_i = 0,\ i > k+1$ т.к. $z \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\})$

$$\ge \sigma_{k+1} \|\cancel{V^*} z\|_2 = \sigma_{k+1} \|z\|_2 = \sigma_{k+1}$$

Но $\|A - A_k\| = \sigma_{k+1}$ (т.к. $\|A - A_k\|_2 = \sigma_1(A - A_k)$) $\blacksquare$