

# Лекция 3

---

## Основы матричных вычислений

Рахуба М.В.  
01.02.21

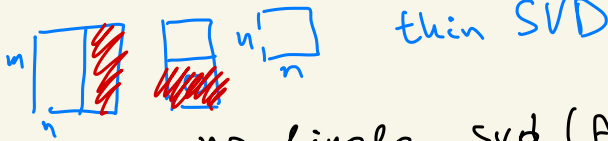
---

---

# Матричное представление

## матрицы 2

$$A = U \Sigma V^*$$



np.linalg.svd(A, full\_matrices=False)

Сложность:  $O(mn \min(m, n)) \stackrel{m=n}{=} O(n^3)$

Применимо где матрица с  $m, n \sim 10^3 - 10^4$ .

① QR разложение

$$A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad m \geq n, \quad \text{rank}(A) = n$$

Хотим получить

$$Q = [q_1, \dots, q_n] \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad (Q^* Q = I)$$

} ортон. базис в  $\text{Im}(A)$

Грамм-Шmidt:

$$\tilde{q}_1 = a_1, \quad q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|_2}$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - q_1(q_1^* a_2), \quad q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|_2}$$

⋮

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [q_1, q_2, \dots, q_n] \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

$A = QR$  - QR-разложение.

$$O(mn^2) = O(mn \min(m, n))$$

Сложность: нр. linealg.  $qr$

② Операции с малоранговыми матрицами

а) Приведение скелетного разл. к компактной SVD

$$A = UV^*, \quad U \in \mathbb{C}^{m \times r}, \quad V \in \mathbb{C}^{n \times r}$$

$$Q_u R_u = U \quad - \quad O(mr^2)$$

$$Q_v R_v = V \quad - \quad O(nr^2)$$

$$A = UV^* = Q_u R_u R_v^* Q_v^*$$



$$\hat{U} \Sigma \hat{V}^* = \text{нр. linealg. svd} (R_u R_v^*): \quad O(r^3)$$

$$A = \underbrace{(Q_u \hat{U})}_{\hat{U}} \Sigma \underbrace{(Q_v \hat{V})^*}_{\hat{V}^*} = \hat{U} \Sigma \hat{V}^*$$

$$\hat{U}^* \hat{U} = \hat{U}^* \underbrace{Q_u^* Q_u}_{I} \hat{U} = I$$

$$O((n+m)r^2 + r^3)$$

$$\ll O(mn \min(m, n))$$

нр.  $r \ll \min(m, n)$

(В этих пер-вах воспринимайте  $O(\cdot)$  как константу)

б) Уменьшение ранга

$$A = U V^*$$

а) Приводим к SVD

б) Заменяем "маленькие" счл. числа

в) Арифм. операции

$$A_1 + A_2 = U_1 V_1^* + U_2 V_2^* = [U_1 U_2] [V_1 V_2]^*$$

и т.д.  $(A_1 A_2, A_1 \otimes A_2, \dots)$   
↑  
элементарное (Адамарово произв.)



### 3 Ортопроектор

**Опр.** 1)  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  - ортопроектор, если

$$P^2 = P \quad (\text{косой проектор})$$

$$P^* = P$$

2)  $P$  - ортопроектор на  $S$ , если  $\text{Im}(P) = S$   
вект. подпр-во

**Утв. 1** Если  $v \in \text{Im}(P)$ , то  $Pv = v$   
проектор

$$\square Pv = P(Px) = P^2x = Px = v \quad \blacksquare$$

**УТВ. 2** Если  $P$  - ортогональный проектор, то  $(I - P)$  - ортогональный проектор

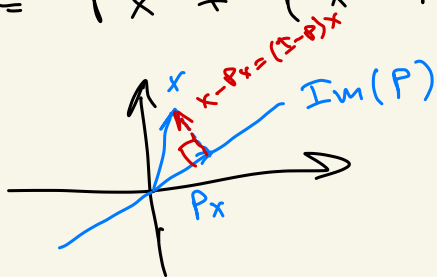
$$\square (I - P)^* = I - P$$

$$(I - P)^2 = I - P - P + P^2 = I - P \quad \blacksquare$$

**УТВ. 3**  $\forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad P_x \perp (I - P)y$

$$\begin{aligned} \square (P_x)^* (I - P)y &= x^* P^* (I - P)y = \\ &= x^* (P - P^2)y = x^* (P - P)y = 0 \end{aligned} \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad \blacksquare$$

$$x = Px + (x - Px) = Px + (I - P)x$$



**УТВ. 4** Пусть  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  - матрица ранга  $r$ ,  $m \geq n$ . Тогда ортогональный проектор на  $\text{Im}(A)$ :

$$P = A (A^* A)^{-1} A^*$$

$$\square P^2 = A (A^* A)^{-1} \cancel{(A^* A)} \cancel{(A^* A)^{-1}} A^* = P$$

$$P^* = P$$

$$\text{Im}(P) \subseteq \text{Im}(A) \quad \text{т.к.} \quad Px = A \left[ (A^* A)^{-1} A^* x \right].$$

$$PA = A \cancel{(A^* A)^{-1}} \cancel{A^*} A = A$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Im}(A) \subseteq \text{Im}(P) \Rightarrow \text{Im}(P) = \text{Im}(A)$$

Но упоминание не важно считать  $(A^* A)^{-1}$ !

$$A = QR$$

$$P = QR \underbrace{\left( (QR)^* (QR) \right)^{-1}}_{R^* Q^* Q R} (QR)^* =$$

$$= QR (R^* R)^{-1} R^* Q^* =$$

$$= \cancel{Q} \cancel{R} \cancel{R^{-1}} \cancel{(R^*)^{-1}} \cancel{R^*} Q^* = QQ^*$$

4) Простейший рангов. алгоритм SVD

**УТВ.5** Пусть  $Q \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ,  $Q^* Q = I_r$  - ортого.

м.и.н  
 $B: \text{Im}(B) \subseteq \text{Im}(Q)$

$$\|A - B\|_F = \|A - \underbrace{Q Q^* A}_{(I - Q Q^*) A}\|_F$$

$$\square \quad \|A - Q C\|_F^2 = \| \begin{matrix} \uparrow \\ A \end{matrix} - [Q Q^*] \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \|_F^2 =$$

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \\ r \end{matrix} \quad \begin{matrix} r \\ n \end{matrix}$

$$[Q Q^*]^* = \begin{bmatrix} Q^* \\ (Q^*)^* \end{bmatrix}$$

$$= \| \begin{bmatrix} Q^* \\ (Q^*)^* \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \|_F^2 = \| \begin{bmatrix} Q^* A - C \\ (Q^*)^* A \end{bmatrix} \|_F^2 =$$

$$= \| Q^* A - C \|_F^2 + \| \underbrace{(Q^*)^* A}_{\text{const}} \|_F^2 \rightarrow \min_C$$

$$C = Q^* A \Rightarrow B = Q C = Q Q^* A \quad \blacksquare$$

Как выбрать  $Q$ ?

Идеально выбрать  $Q = U_r$  -  $r$  первых синг. левых вект.  $A$ .

$$Q Q^* A = U_r U_r^* U \Sigma V^* = U_r \Sigma_r V_r^*$$

$\begin{bmatrix} U_r & U_r^\perp \\ r & m-r \end{bmatrix}$

$$\left( \begin{array}{l} U_r^* U = [I \ 0] \\ U_r^* U \Sigma = [I \ 0] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} = [\Sigma_1 \ 0] \end{array} \right)$$

$U_r$  мы не знаем (как-раз хотим найти).

Будем действовать по-другому:

минимальный ранг

1)  $\Omega = [\omega_1, \dots, \omega_r] \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ,  $r = \text{rank}(A)$   
 ир. random. randn(n, r) (каждый элемент из  $N(0, 1)$ )

2)  $Y = A \Omega$  ( $y_i = A \omega_i \in \text{Im}(A)$ )  
 $[y_1 \dots y_r]$  — мин. кол-во столбцов  $A$  со случайными коэффициентами

3)  $QR = Y$   $O(nr^2)$  — QR-разлож.  $Y$

$\Downarrow$   $O(nr)$   $O(nr^2)$   $O(nr^2)$   $O(nr^2)$   $O(nr^2)$

$B = Q(Q^* A) = Q(W \Sigma V^*) = (QW) \Sigma V^*$

4)  $B \Sigma$  оставить  $k$  первых симм. чисел.

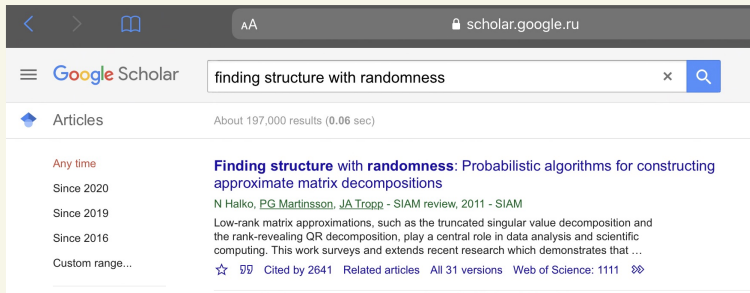
Итого:  $O(mnr) \ll O(mn \min(m, n))$

Можно генерировать  $\Omega$  с зад. структурой и ещё уменьшить сложность.

Rand. алгоритм хорошо подходит для матриц, которые не помещаются в быструю память.



# Сходимость алгоритма (теор 1.1) (не входит в программу курса)



The screenshot shows a Google Scholar search interface. The search bar contains the text "finding structure with randomness". Below the search bar, the results are displayed. The first result is titled "Finding structure with randomness: Probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions" by N. Halko, P. G. Martinsson, and J. A. Tropp. The abstract mentions that low-rank matrix approximations play a central role in data analysis and scientific computing. The result is cited by 2641 sources and has 31 versions.

Articles About 197,000 results (0.06 sec)

Any time  
Since 2020  
Since 2019  
Since 2016  
Custom range...

**Finding structure with randomness: Probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions**  
N Halko, [P G Martinsson](#), [J A Tropp](#) - SIAM review, 2011 - SIAM

Low-rank matrix approximations, such as the truncated singular value decomposition and the rank-revealing QR decomposition, play a central role in data analysis and scientific computing. This work surveys and extends recent research which demonstrates that ...

☆ 🔖 Cited by 2641 Related articles All 31 versions Web of Science: 1111 🔗

<https://arxiv.org/pdf/0909.4061.pdf>