Лекция 8

Основы матричных вычислений

Рахуба М. В.

09.03.21

Быстрое преобразование Фурье и структурир. матрицы

$\underset{\in\mathbb{C}^{n\times n}}{A}\ \underset{\in\mathbb{C}^{n}}{x}$, $O(n^2)$

matvec

① Быстрое преобр. Фурье (БПФ, FFT)

$\boxed{\text{Опр. 1}}$

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n^{1\cdot 1} & \omega_n^{1\cdot 2} & \dots \\ \vdots & \omega_n^{2\cdot 1} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & \omega_n^{(n-1)\cdot 1} & & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad \omega_n = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$$

матрица Фурье

$$(F_n)_{pq} = (\omega_n)^{p\cdot q}, \quad p, q = 0, 1, \dots, n-1$$

$\boxed{\text{Св-ва}}$ 1) $F_n^T = F_n$

2) $F_n^* F_n = n\cdot I_n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} F_n$ – унитар.

$y = F_n x$ — дискретное преобр. Фурье

$$y_p = \sum_{q=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} pq} x_q$$

Умножение на F_n быстрее, чем за $O(n^2)$ — быстрое преобр. Фурье $O(n \log n)$

Опр. 2 P_n, столбцы (строки) которой явл. перестановкой строк (столбцов) единичной матрицы I_n назыв. матр. перестановки

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Св-ва 1) $P_m A$ — перест. строк $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$A P_n$ — столбцов

2) $P_n^T P_n = I_n$

Пусть P_{2n} состоит из строк единич. матр. с номерами

$1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$

$$P_{2n}F_{2n} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
1 & \omega_{2n}^{2\cdot 1} & \dots & \dots & \omega_{2n}^{2\cdot(n+0)} & \omega_{2n}^{2\cdot(n+1)} & \dots & \\
1 & \omega_{2n}^{4\cdot 1} & \dots & & \omega_{2n}^{4(n+0)} & \omega_{2n}^{4(n+1)} & \dots & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \\
\hline
1 & \omega^{1\cdot 1} & \omega^{1\cdot 2} & \dots & & & & \\
1 & \omega^{3\cdot 1} & \omega^{3\cdot 2} & \dots & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}\right)$$

1 2

3 4

$$1)\quad \omega_{2n}^{2p\cdot q} = \left(e^{-\frac{2\pi i}{\cancel{2}n}}\right)^{\cancel{2}pq} = \omega_n^{pq}$$

$$2)\quad \omega_{2n}^{2p(n+q)} = \underbrace{\left(e^{-\frac{2\pi i}{\cancel{2n}}}\right)^{\cancel{2}p\cancel{n}}}_{e^{-2\pi i\cdot p} = 1} \cdot \left(e^{-\frac{2\pi i}{\cancel{2}n}}\right)^{\cancel{2}pq} = \omega_n^{pq}$$

$$3)\quad \omega_{2n}^{(2p+1)q} = \omega_{2n}^{2pq}\,\omega_{2n}^{q} = \omega_n^{pq}\,\omega_{2n}^{q}$$

4) (проверьте)

$$P_{2n}F_{2n} = \begin{pmatrix} F_n & F_n \\ F_n \underset{\substack{\parallel \\ \operatorname{diag}(1,\ \omega_{2n},\ \omega_{2n}^2, \dots, \omega_{2n}^{n-1})}}{W_n} & -F_n W_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$$

$$F_{2n} X = P_{2n}^{-1} \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad O(n)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ W_n(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \quad O(n)$$

$$\begin{pmatrix} F_n(x_1 + x_2) \\ F_n(W_n(x_1 - x_2)) \end{pmatrix}$$

← рекурсивно на F_n

$\log_2 n$ уровней

Итог: P_{2n}^T $O(n)$

$O(n \log n)$

$$\text{np.fft.fft}(x) = F_n x$$

$$\text{np.fft.ifft}(x) = F_n^{-1} x = \frac{1}{n} F_n^* x$$

2 Циркулянты

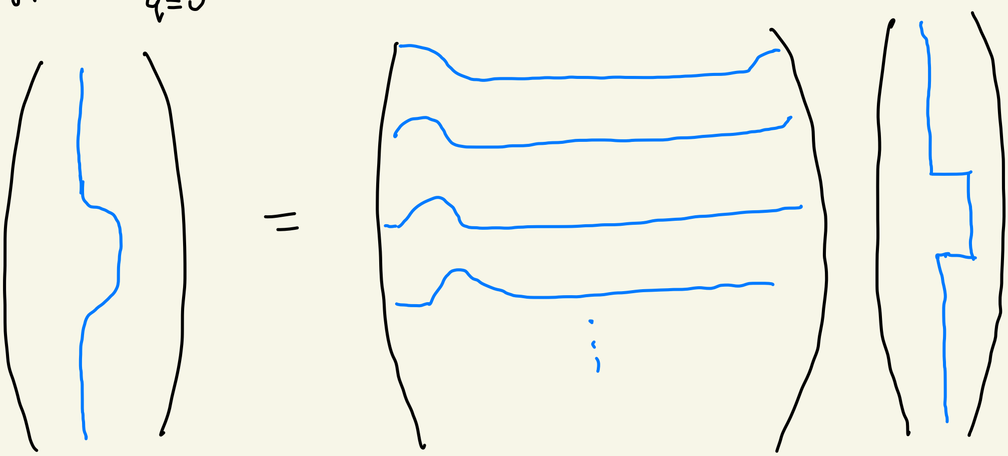
Опр. 3

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & & & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & & c_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

циркулянт.

$y = Cx$ — циклическая свёртка

$$y_p = \sum_{q=0}^{n-1} c_{(p-q) \bmod n} \, x_q$$



$$y = Cx \quad \text{за} \quad O(n\log n)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матрица циклич. перест.}$$

$$C = c_0 I + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_{n-1} P^{n-1}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – циркулянт, тогда

$$C = F_n^{-1} \operatorname{diag}(F_n \underset{\text{первый столбец } C}{c}) F_n$$

□ 1) $P = F_n^{-1} \operatorname{diag}(F_n e_2) F_n$, $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} AS &= S\Lambda \\ As_q &= \lambda_q s_q \end{aligned}}$$

$$P F_n^{-1} = F_n^{-1} \operatorname{diag}(F_n e_2)$$

$$P F_n^{*} = F_n^{*} \operatorname{diag}(F_n e_2)$$

$$P \overline{F_n} = \overline{F_n} \operatorname{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$$

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ \bar\omega_n^{q} \\ \vdots \\ \bar\omega_n^{(n-1)q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\omega_n^{(n-1)q} \\ 1 \\ \bar\omega_n^{q} \\ \vdots \end{pmatrix} = \underset{\omega_n^q}{\bar\omega_n^{-q}} \begin{pmatrix} \bar\omega_n^{nq} = 1 \\ \bar\omega_n^{q} \\ \bar\omega_n^{2q} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2) $$P^2 = F_n^{-1} \operatorname{diag}(F_n e_2) \underbrace{F_n F_n^{-1}}_{I} \operatorname{diag}(F_n e_2) F_n =$$

$$= F_n^{-1} \underbrace{\operatorname{diag}(F_n e_2)^2}_{\operatorname{diag}(F_n e_3)} F_n$$

$$P^k = F_n^{-1}\,\mathrm{diag}(F_n e_{k+1})\,F_n$$

3) $$C = c_0 I + c_1 P + c_2 P^2 + \ldots =$$

$$= F_n^{-1}\,\mathrm{diag}\left(c_0 F_n e_1 + c_1 F_n e_2 + c_2 F_n e_3 + \ldots\right) F_n =$$

$$= F_n^{-1}\,\mathrm{diag}\Big(F_n \underbrace{\left(c_0 e_1 + c_1 e_2 + \ldots\right)}_{c}\Big) F_n \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ (дискр. теорема свёртки)

$$Cx = F_n^{-1}\left((F_n c) \odot (F_n x)\right)$$

$\square$ $Cx = F_n^{-1}\,\mathrm{diag}(F_n c)\,(F_n x)$ $\blacksquare$

(4) Тёплицевы матрицы (Toeplitz)

$\boxed{\text{Опр. 4}}$

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{1-n} \\ t_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_2 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{n-1} & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix} \text{ – Тёплицева}$$

(диаг.-пост. матрица)

$$T = \{ t_{p-q} \}_{p,q=0}^{n-1}$$

$y = Tx$ или $y_p = \sum_{q=0}^{n-1} t_{p-q} x_q$ - дискретная свёртка

$\forall$ Тёплицеву матрицу можно вложить в циркулянт размера $(2n-1)\times(2n-1)$

(можно и в $2n \times 2n$)

$$\begin{bmatrix} Tx \\ \hline \text{"мусор"} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_2 & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_2 \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ \hline t_{-2} & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & t_{-2} & t_2 & t_1 & t_0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

T

c

первая строка T в обратном порядке и без t_0

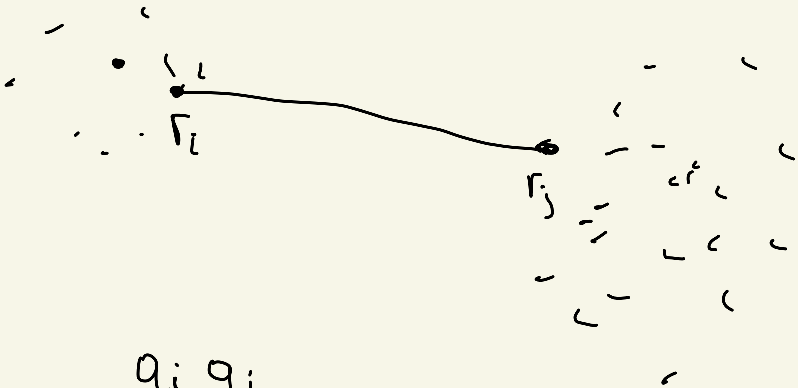
$$\Downarrow$$

$$Tx = \text{ifft}\left(\text{fft}(c) * \text{fft}\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)[:n]$$

В 2D

$$y_{p_1 p_2} = \sum_{q_1, q_2} t_{p_1 - q_1, p_2 - q_2} \, x_{q_1, q_2}$$

$$\text{vec}(Y) = T_{2D} \, \text{vec}(X)$$



$$\frac{q_i q_i}{\| r_i - r_j \|_2}$$

$$A = \left\{ \frac{1}{\| r_i - r_j \|_2} \right\}$$