Лекция 9

Основы матричных вычислений

Рахуба М. В.
22.03.21

FFT и структурир. матрицы 2

① FFT, $n \neq 2^e$

а) $\forall$ Тёплицеву матрицу $n \times n$ можно вложить в цирк. размера $\geq 2n-1$

$2n-1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t_0 & t_{-1} & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ \hline t_{-1} & t_1 & t_0 \end{array}\right)$$

$> 2n-1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} t_0 & t_{-1} & 0 & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & 0 \\ \hline 0 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & 0 & t_1 & t_0 \end{array}\right)$$

б) $(F_n)_{pq} = e^{-\frac{2\pi i}{n} pq} \equiv \omega_n^{pq}$

$n \neq 2^e$

$F_n x \to \cancel{F_{2^l}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}$ и другое

$$\omega_n^{pq} = \omega_n^{\frac{p^2+q^2-(p-q)^2}{2}} = \omega_n^{p^2/2}\,\omega_n^{-\frac{(p-q)^2}{2}}\,\omega_n^{q^2/2}$$

$$F_n = D\,T\,D, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \omega_n^{1^2/2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^{(n-1)^2/2} \end{pmatrix}$$

$$F_n x = \left(D\left(T(Dx)\right)\right), \qquad C = F_{2^L}^{-1}\operatorname{diag}(F_{2^L}c)F_{2^L}$$

T вложим в циркулянт порядка $2^L \le 4n$

② FFT 2D

1D: $$y_p = \sum_{q=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} pq} x_q \iff y = F_n x$$

2D:
$$y_{p_1 p_2} = \sum_{q_1=0}^{m-1}\sum_{q_2=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{m}p_1q_1 - \frac{2\pi i}{n}p_2q_2} x_{q_1q_2} =$$

$$= \sum_{q_1}\sum_{q_2} \omega_m^{p_1q_1}\omega_n^{p_2q_2} x_{q_1q_2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{q_2}\omega_n^{p_2q_2} \underbrace{\sum_{q_1}\omega_m^{p_1q_1} x_{q_1q_2}}_{(F_m X)_{p_1q_2}}}_{(F_m X F_n^T)_{p_1p_2}}$$

$$Y = F_m X F_n^T$$

$$Y = \text{np.fft.fft}(\text{np.fft.fft}(X, \text{axis}=0), \text{axis}=1) \equiv$$

$$\equiv \text{np.fft.fft2d}(X)$$

$$\text{fftn}(X)$$

$$\text{vec}(Y) = \text{vec}(F_m X F_n^T) = \underbrace{F_n \otimes F_m}_{\text{матрица 2D DFT}} \text{vec}(X)$$

③ Циклические свёртки в 2D

$\boxed{\text{Опр.}}$

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & C_{n-1} & \cdots & C_1 \\ C_1 & C_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & C_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_{n-2} & \cdots & C_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn \times mn}$$

$C_p \in \mathbb{C}^{m \times m}$ – циркулянты

БЦЦБ (BCCB)

(блочный циркулянт с циркулянт. блоками)

$\boxed{\text{Теор}}$ Пусть C – БЦЦБ, тогда

$$C = (F_n \otimes F_m)^{-1} \operatorname{diag}(F_n \otimes F_m \underbrace{c}_{\text{первый столбец } C}) F_n \otimes F_m$$

$\square$

$$C = I \otimes C_0 + \underbrace{P}_{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \otimes C_1 + \ldots + P^{n-1} \otimes C_{n-1}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^k = F_n^{-1} \operatorname{diag}(F_n e_{k+1}) F_n$$

$$C_k = F_m^{-1} \operatorname{diag}(F_m c_k) F_m$$

$$P^k \otimes C_k = F_n^{-1} \otimes F_m^{-1} \Big(\underbrace{\operatorname{diag}(F_n e_{k+1}) \otimes \operatorname{diag}(F_m c_k)}_{\operatorname{diag}\big(\overbrace{(F_n e_{k+1}) \otimes (F_m c_k)}^{(F_n \otimes F_m)(e_{k+1} \otimes c_k)}\big)} \Big) \cdot F_n \otimes F_m$$

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} P^k \otimes C_k = \underbrace{F_n^{-1} \otimes F_m^{-1}}_{(F_n \otimes F_m)^{-1}} \operatorname{diag}\Big(F_n \otimes F_m \sum e_{k+1} \otimes c_k\Big) \cdot F_n \otimes F_m$$

$$e_{k+1} \otimes c_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \otimes c_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

к-я позиция

$\blacksquare$

$$\overset{\text{"}vec(Y)\text{"}}{y} = C\, \overset{\text{"}vec(X)\text{"}}{x}$$

$$vec(Y) = C\, vec(X)$$

$$Y = ifft2d\left(fft2d([c_0 \ldots c_{n-1}]) * fft2d(X)\right)$$

поэлемент. произв. в Python

4 Дискретная свёртка

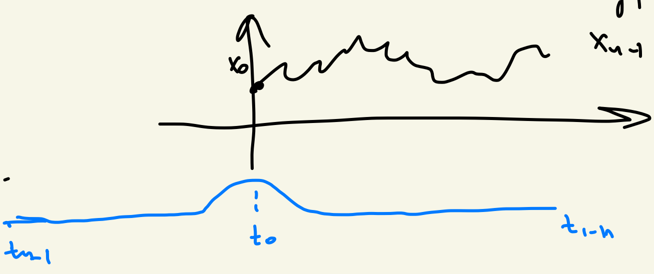
a) 1D

$$y_p = \sum_{q=0}^{n-1} t_{p-q}\, x_q \iff y = Tx$$

$$t = \begin{pmatrix} \vdots \\ t_2 \\ t_1 \\ t_0 \\ t_{-1} \\ t_{-2} \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n-1}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y_0 = t_{0-0}\, x_0 + t_{0-1}\, x_1$$

$$y_1 = t_{1-0}\, x_0 + t_{1-1}\, x_1$$



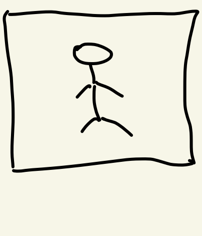
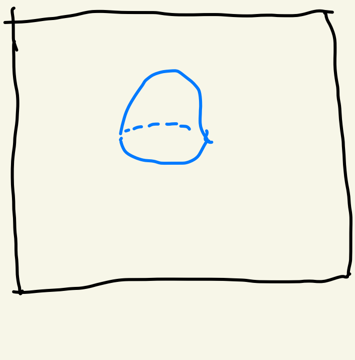
На практике часто $t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\}$ d ненул.

При маленьком d можно не использовать FFT

б) 2D

$$y_{p_1 p_2} = \sum_{q_1=0}^{m-1} \sum_{q_2=0}^{n-1} t_{p_1-q_1,\, p_2-q_2}\, x_{q_1 q_2}$$

$$t = \begin{pmatrix} \ddots & & \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ & t_{1,1} & t_{1,0} & \cdots & \\ \cdots & t_{0,1} & t_{0,0} & t_{0,-1} & \cdots \\ & \cdot & t_{-1,0} & \cdots & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2m-1)\times(2n-1)}$$

$X =$  , $t =$ 

$$\mathrm{vec}(Y) = T \ \mathrm{vec}(X)$$

$$y_{p_1 p_2} = \sum_{q_1=0}^{m-1} \sum_{q_2=0}^{n-1} t_{p_1-q_1,\, p_2-q_2} \, x_{q_1 q_2}$$

$$y_{p_1 0} = \underbrace{\sum_{q_1=0}^{m-1} t_{p_1-q_1,\, 0-0} \, x_{q_1 0}}_{T_0 X[:,0]} + \underbrace{\sum_{q_1=0}^{m-1} t_{p_1-q_1,\, 0-1} \, x_{q_1 1}}_{T_{-1} X[:,1] \dots} + \dots$$

$$y_{p_1 1} = \underbrace{\sum_{q_1=0}^{m-1} t_{p_1-q_1,\, 1-0} \, x_{q_1 0}}_{T_1 X[:,0]} + \underbrace{\sum_{q_1=0}^{m-1} t_{p_1-q_1,\, 1-1} \, x_{q_1 1}}_{T_0 X[:,1]} + \dots$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{vec}(Y) = \underbrace{\begin{bmatrix} T_0 & T_{-1} & \dots & \\ T_1 & \ddots & \ddots & T_{-1} \\ \vdots & \ddots & T_1 & T_0 \end{bmatrix}}_{\text{БТТБ (BTTB)}} \mathrm{vec}(X)$$

БТТБ можно вложить в БЦЦБ (семинар)

5 дискретное косинус преобр.

type-2

$$A = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cos\left(\frac{\pi p(2q+1)}{2n}\right) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$A^T A = I$$

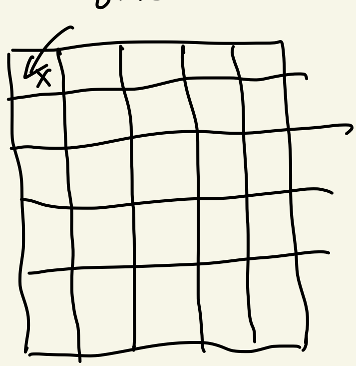
В 2D: $Y = A X A^T$, $\mathrm{vec}(Y) = A \otimes A \,\mathrm{vec}(X)$

$\Updownarrow$ $\qquad a_j \otimes a_i$

JPEG: $X = A Y A^T$ $\qquad a_i \circ a_j$

$\Updownarrow$

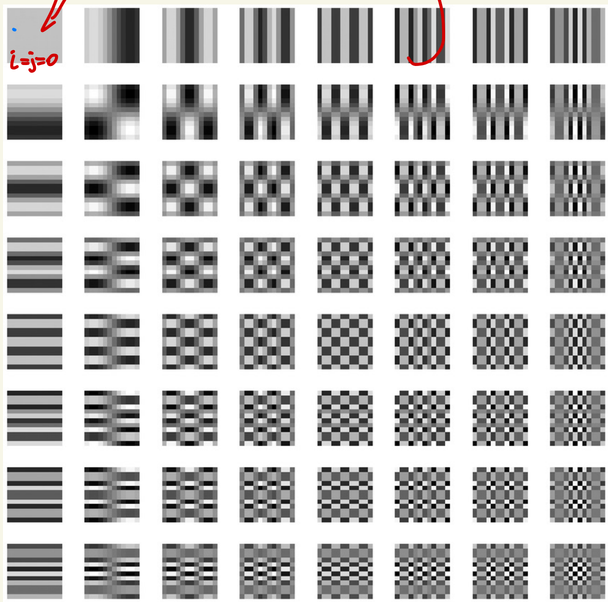
8×8



$$X = \sum y_{ij}\, a_i \cdot a_j^T$$

каждый блок 8×8 пикселей X преобразуется в $Y = A X A^T$ (коэфф. разлож по $a_i a_j^T$). Затем в Y для "больших" i, j значение зануляют (на самом деле квантизуют, но квантизация много что может занулить)

j



i

30

105

$$\begin{bmatrix} 40 & \cdots & 100 \\ & & \vdots \\ 102 & \cdots & 100 \end{bmatrix}$$